Tentamen Lineaire Algebra, donderdag 29 januari 2004

De toets bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Stel $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle $n \times n$ matrices met reële componenten.

a. Wat is de dimensie van $M_{n\times n}(\mathbb{R})$?

b. Definieer de afbeelding $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ door $T(M) = \mathrm{tr}(M)$, waar tr (M) de som is van de diagonaalelementen van M. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.

c. Bepaal de beeldruimte $R(T)$ van T. Wat is de rang van T?

d. Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(T)$ van T.

e. Neem nu aan dat $n = 2$. Bepaal een basis van de nulruimte $N(T)$.

f. Neem weer aan dat $n = 2$. Kies in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ het inproduct

$$< M_1, M_2 >= \mathrm{tr}(M_2^T M_1).$$

Bepaal een orthonormale basis van de nulruimte $N(T)$.

2. We bekijken de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ die gedefinieerd wordt door

$$T(a_1, a_2, a_3) := (a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 - a_2 + a_3)x + a_1x^2$$

a. Toon aan dat T een isomorfie is.

b. Bepaal de matrix $[T]_\beta^\gamma$ van T ten opzichte van de standaardbasis β in $\mathbb{R}^3$ en de basis $\gamma = \{1, x, x^2\}$ in $P_2(\mathbb{R})$.

c. Bepaal de inverse van de matrix $[T]_\beta^\gamma$.

d. Bepaal de inverse T^{-1} van de afbeelding T.

3. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de rang van A.

b. Laat de vector b gegeven zijn door

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de oplossingsverzameling $\mathcal{V}_1$ van het stelsel $Ax = b$.

c. Bepaal de oplossingsverzameling $\mathcal{V}_2$ van het homogene stelsel $Ax = 0$.

d. Wat is de dimensie van $\mathcal{V}_2$?

4. Stel $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de afbeelding die aan elke matrix M zijn getransponeerde M^t toevoegd, d.w.z. $T(M) := M^t$.

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.

b. Toon aan dat T slechts twee eigenwaarden heeft, namelijk 1 en -1.

c. Geef een beschrijving van de eigenruimten behorend bij deze eigenwaarden.

d. Neem nu aan dat $n = 2$. Bepaal een geordende basis β van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ zodanig dat $[T]_\beta$ een diagonaalmatrix is.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 24
Vraagstuk 2: 22
Vraagstuk 3: 22
Vraagstuk 4: 22